

# Effet des oscillations périodiques sur l'instabilité d'interface d'un système a deux couches fluides saturant un milieu poreux

J. Bouchgl<sup>a</sup>, S. Aniss<sup>a</sup>, M. Souhar<sup>b</sup>

a. Université Hassan II, Faculté des Sciences Aïn Chock, Laboratoire de Mécanique Km 8 Route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc

b. lemta-UMR CNRS 7563-Ensem, 2 avenue de la Forêt de Haye, BP 160, Vandoeuvre-Les-Nancy 54504, France

## Résumé :

*Nous présentons une étude sur les effets des oscillations périodiques horizontales sur l'instabilité interfaciale dans un milieu poreux saturé par deux couches fluides Newtoniennes, non miscibles et incompressibles de viscosités et de masses volumiques différentes. L'étude de stabilité linéaire de la solution de base, correspondant à deux écoulements pulsés, a permis d'aboutir à un oscillateur paramétrique régissant l'évolution de l'amplitude de l'interface. Nous montrons que l'instabilité de l'interface est soit de type de Kelvin-Helmholtz soit de type paramétrique. Nous examinons l'influence de la fréquence et de l'amplitude sur le seuil d'instabilité marginale de l'interface.*

## Abstract :

*The effect of horizontal periodic oscillations on the interfacial instability of two immiscible fluids of different densities in a fully saturated porous media is investigated. A linear stability analysis of the viscous basic flow leads to the periodic Mathieu oscillator describing the evolution of interfacial amplitude. We examine mainly the effect of the periodic oscillations and the influence of the frequency on the stability of the interface.*

**Mots clefs :** Milieu poreux ; Instabilité Interfaciale ; Instabilité paramétrique

## 1 Introduction

L'étude de l'instabilité interfaciale dans un milieu poreux saturé par deux couches fluides Newtoniennes, non miscibles et incompressibles a fait l'objet de plusieurs travaux théoriques et expérimentaux [1 – 8]. Dans ce cadre, Saffman et Taylor [1] ont établi que, dans un milieu poreux, l'instabilité peut être déclenchée avec des valeurs particulières du contraste de viscosité entre les deux couches fluides. En utilisant la cellule de Hele-Shaw pour modéliser l'écoulement dans le milieu poreux, ils ont observé une déstabilisation de l'interface air-glycérol et la formation des motifs, doigts de digitation, qui dépendent de la nature des fluides, de la géométrie de l'écoulement et des propriétés du milieu. Plus tard, Raghvan et al. [2] ont effectué une analyse de stabilité linéaire de l'interface en se basant sur la loi de Darcy pour déterminer l'équation qui correspond au taux de croissance. Dans ce travail, les auteurs ont montré que l'instabilité de Kelvin Helmholtz ne se déclenche que lorsque le fluide le plus lourd est placé au-dessous du fluide le plus léger. Par la suite, Bau [3] s'est intéressé au cas de deux couches fluides en mouvement relatif en considérant deux modèles : le premier modèle s'est basé sur la loi de Darcy et le deuxième sur l'équation de Forchheimer. Dans cette étude, qui est une extension du travail de Raghvan et al [2], Bau a montré que, dans les deux cas, l'instabilité de Kelvin Helmholtz se déclenche si les vitesses des deux fluides dépassent un certain seuil. Dans le cas d'un écoulement de Darcy, le seuil de stabilité marginale dépend de la densité et du rapport de mobilité qui se définit

comme étant le rapport de la viscosité et de la perméabilité relative du fluide. El Sayed [4] a considéré le cas de deux fluides diélectriques en présence d'un champs électrique en utilisant les deux approches utilisés dans [3]. L'analyse de stabilité linéaire a montré que, dans les deux cas, le champ électrique a tendance à déstabiliser l'interface. Dans le même contexte, Khan et *al.* [5] ont étudié la stabilité interfaciale de deux fluides conducteurs en présence d'un champ magnétique uniforme et horizontal. Ils ont établi que la viscosité et la porosité ont un effet stabilisant tandis que l'augmentation des vitesses relatives de l'écoulement des deux fluides favorise la déstabilisation de l'interface. Entretemps, la stabilité électrohydrodynamique de deux fluides visqueux avec transfert de chaleur et de masse a été discutée par Asthana et *al.* [6]. Dans cette étude, l'accent a été mis sur l'influence du champ électrique et l'effet du rapport des constantes diélectriques sur la vitesse relative des fluides. En absence de champ électrique, Obied Allah [7] a mené une étude sur l'instabilité de Kelvin Helmholtz et celle de Rayleigh Taylor dans un écoulement parallèle de deux fluides, en tenant compte de la viscosité, de la tension superficielle et du transfert d'énergie et de masse. Récemment, Asthana et *al.* [8] ont utilisé l'hypothèse de l'écoulement à potentiel des vitesses pour analyser l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans un milieu poreux saturé par deux fluides visqueux. Le model le plus adéquat pour étudier les milieux fortement perméables est celui de de Darcy-Brinkman. Asthana et *al.* ont considéré que l'écoulement est irrotationnel, donc, le terme de diffusion visqueuse, ou le terme de Brinkman lié à la viscosité effective dans l'équation de Darcy-Brinkman disparaît et le model se réduit à celui de Darcy. Ils ont montré que la porosité a un effet stabilisant sur la valeur critique de la vitesse des deux fluides ; le nombre de Reynolds et le rapport de viscosité ont un effet déstabilisant sur le taux de croissance tandis que le nombre de Bond a un effet stabilisant. Dans le travail que nous présentons, à la différence des travaux cités ci-dessus, nous nous intéressons à analyser la stabilité d'une interface séparant deux fluides visqueux non miscibles saturant un milieu poreux et soumis à des oscillations périodiques horizontales. Nous effectuons une analyse de stabilité linéaire et nous examinons l'effet des oscillations périodiques sur le seuil de l'instabilité marginale.

## 2 Formulation du problème

Nous considérons deux fluides Newtoniens, non miscibles et incompressibles de viscosités  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et de densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , saturant un milieu poreux d'extension infinie en  $\mathbf{x}$  (Figure 1) et de hauteur  $h = h_1 + h_2$ . Les deux couches fluides sont soumises à un mouvement oscillant selon la loi  $a \cos(\omega t)$ .

Nous notons par  $p_j$  la pression et par  $\mathbf{V}_{fluidej}$ , où  $j = 1$  ou  $2$  selon le fluide considéré, la vitesse relative

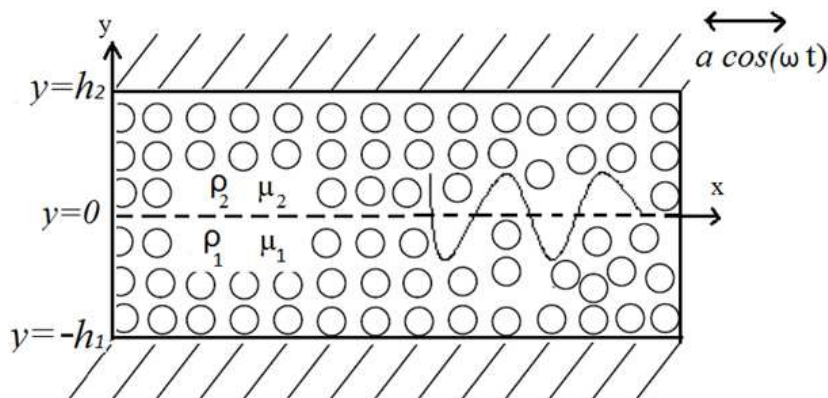


FIGURE 1 – Fluides non miscibles saturant un milieu poreux soumis à des oscillations horizontales.

du fluide liée à la vitesse de Darcy,  $\mathbf{V}_j(u_j, v_j)$ , dite aussi vitesse de filtration, par la relation suivante  $\mathbf{V}_{fluidej} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{V}_j$ . En supposant la validité de la formulation de Darcy, les équations de conservation macroscopiques de la masse et de la quantité de mouvement peuvent être écrites de la façon suivante

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + \frac{\mathbf{V}_j}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{V}_j \right] = -\nabla p_j - \frac{\mu_j}{k_1} \mathbf{V}_j + \rho_j a \omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{x} + \rho_j \mathbf{g} \quad (2)$$

Avec  $\varepsilon$  est la porosité du milieu et  $k_1$  sa perméabilité.

## 2.1 Solutions de base

A l'équilibre, l'interface entre les deux fluides est plane et l'état de base est instationnaire. Soit donc,  $\mathbf{V}_j^b(t) = (U_j^b, 0, 0)$ , la solution de base qui satisfait nécessairement l'équation de continuité et les équations de la quantité de mouvement. Les équations de conservation, correspondant à la solution de base, se réduisent à

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \frac{\partial U_j^b}{\partial t} = -\frac{\partial P_j^b}{\partial x} - \frac{\mu_j}{k_1} U_j^b + \rho_j a \omega^2 \cos(\omega t) \quad (3)$$

$$0 = -\frac{\partial P_j^b}{\partial y} - \rho_j g \quad (4)$$

Les parois verticales, en  $x = 0, L$ , génèrent un écoulement au sein du milieu poreux et le volume déplacé des deux fluides vérifie la condition suivante

$$\int_{-h_1}^0 \mathbf{V}_1^b \cdot \mathbf{x} \, dy = - \int_0^{h_2} \mathbf{V}_2^b \cdot \mathbf{x} \, dy \quad (5)$$

En intégrant ces équations, les expressions de la pression de base et de la vitesse de base s'écrivent

$$U_j^b(t) = a\omega [F_j \cos(\omega t) + G_j \sin(\omega t)] \quad (6)$$

$$P_j^b = -\rho_j g y + C_j \quad (7)$$

où  $C_j$  est une constante arbitraire et les fonctions  $F_j$  et  $G_j$  sont données par

$$F_1 = -HF_2 = \frac{H\varepsilon(\rho - 1)}{(\rho H + 1)(1 + \frac{\varepsilon^2}{Da^2} \frac{1}{\Gamma_2^2})} \frac{\varepsilon}{Da} \frac{1}{\Gamma_2} \quad (8)$$

$$G_1 = -HG_2 = -\frac{H\varepsilon(\rho - 1)}{(\rho H + 1)(1 + \frac{\varepsilon^2}{Da^2} \frac{1}{\Gamma_2^2})} \quad (9)$$

Avec  $H = \frac{h_2}{h_1}$ ,  $Da = \frac{k_1}{h^2}$  est le nombre de Darcy et  $\Gamma_2 = \sigma_2 \left( \frac{\rho H + 1}{\mu H + 1} \right)$  où les paramètres  $\sigma_2 = \frac{\omega \varepsilon^2}{\nu_2}$  est le nombre de fréquence ( $\nu_2$  est la viscosité cinématique du fluide 2),  $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$  est le rapport de densité et  $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  est le rapport de viscosité qu'on peut exprimer en fonction du contraste de viscosité,  $\mu = \frac{1-A}{1+A}$ , avec  $A_\mu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$  et  $-1 \leq A_\mu \leq 1$ .

Remarquons que dans un milieu non poreux,  $\varepsilon = 1$  et  $Da \rightarrow \infty$ , et dans le cas limite correspondant à  $\Gamma_2 \rightarrow \infty$ , par exemple lorsque  $\sigma_2 \rightarrow \infty$  en fixant les autres paramètres, la solution de base obtenu dans notre travail, donnée par l'équation (6), converge vers celle obtenue par Khenner et *al.* [9] dans son approximation non visqueuse.

$$U_1^b = a\omega \left( \frac{h_2(\rho_1 - \rho_2)}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \right) \sin(\omega t), \quad U_2^b = -\frac{h_1}{h_2} \bar{U}_1^b \quad (10)$$

## 2.2 Stabilité linéaire

L'étude de stabilité linéaire de l'état d'équilibre, consiste à superposer à celui-ci des perturbations infinitésimales, nous introduisons alors les variables suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j &= \mathbf{V}_j^b + \mathbf{v}_j(u(x, y, t), v(x, y, t)) \\ P_j &= P_j^b + p_j(x, y, t) \end{aligned}$$

Le système des équations linéaires correspondant à la perturbation de l'état d'équilibre est

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{U_j^b}{\varepsilon} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p_j}{\partial x} - \frac{\mu_j}{k_1} u_j \quad (12)$$

$$\frac{\rho_j}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{U_j^b}{\varepsilon} \frac{\partial v_j}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p_j}{\partial y} - \frac{\mu_j}{k_1} v_j \quad (13)$$

Pour étudier l'évolution dynamique de l'interface, nous décrivons l'interface perturbée par  $y = 0 + \xi(x, t)$  où  $\xi(x, t)$  est une perturbation infinitésimale. Nous cherchons ensuite les solutions du problème en modes normaux

$$[p_j, u_j, v_j] = [\tilde{p}_j(t, y), \tilde{u}_j(t, y), \tilde{v}_j(t, y)] e^{ikx} \quad (14)$$

$$\xi(x, t) = \tilde{\xi}(t) e^{ikx} \quad (15)$$

Le terme  $k$  représente le nombre d'onde dans la direction  $x$  et  $i$  vérifie  $i^2 = -1$ . Par ailleurs, le champ de vitesse,  $\mathbf{v}_j$ , dérive d'un potentiel  $\phi_j$ , solution de l'équation de la continuité, définit pour chaque fluide par

$$\phi_j(x, y, t) = \tilde{\phi}_j(y, t) e^{ikx} = [C_j^1(t) e^{ky} + C_j^2(t) e^{-ky}] e^{ikx} \quad (16)$$

Les constantes  $C_j^1(t)$  et  $C_j^2(t)$  sont déterminées en utilisant les conditions de glissement sur les parois horizontales,  $v_1(y, t) = 0$  en  $y = -h_1$  et  $v_2(y, t) = 0$  en  $y = h_2$ , et la condition cinématique à l'interface

$$\varepsilon \frac{d\tilde{\xi}(t)}{dt} + ik U_j^b \tilde{\xi}(t) = \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial y} \quad (17)$$

Le saut des contraintes à l'interface des deux fluides s'écrit sous la forme ci-dessous [10]

$$(P_1^b + \tilde{p}_1) - (P_2^b + \tilde{p}_2) + (2\mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} - 2\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (18)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à l'interface et  $\gamma$  est la tension superficielle avec  $\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = k^2 \tilde{\xi}(t)$ . Ensuite, la pression totale est linéarisée à l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre au voisinage de  $y = 0$

$$P_j^b + \tilde{p}_j = P_j^b(0) + \frac{\partial P_j^b}{\partial y} \Big|_{y=0} \tilde{\xi} + \tilde{p}_j(y) \quad (19)$$

Le système (11)-(13) associé aux conditions aux limites ci-dessus est réduit à une équation différentielle à coefficients variables dans le temps

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\xi}(t)}{dt^2} + \left[ 2i \frac{k}{\varepsilon} \frac{R_1 U_1^b + R_2 U_2^b}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 \nu_1 + R_2 \nu_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{\varepsilon}{k_1} + 2k^2 \right) \right] \frac{d\tilde{\xi}(t)}{dt} + \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{R_1 + R_2} gk + i \frac{k}{\varepsilon} \frac{R_1 \frac{dU_1^b}{dt} + R_2 \frac{dU_2^b}{dt}}{R_1 + R_2} \right. \\ \left. - \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{R_1 (U_1^b)^2 + R_2 (U_2^b)^2}{R_1 + R_2} + \frac{\gamma k^3}{R_1 + R_2} + i \left( \frac{k}{k_1} + 2 \frac{k^3}{\varepsilon} \right) \frac{R_1 \nu_1 U_1^b + R_2 \nu_2 U_2^b}{R_1 + R_2} \right] \tilde{\xi}(t) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

où  $R_1 = \rho_1 \coth(kh_1)$  et  $R_2 = \rho_2 \coth(kh_2)$ . Pour éliminer le terme qui contient la dérivée de premier ordre de  $\tilde{\xi}(t)$ , nous utilisons le changement de variable suivant

$$\tilde{\xi}(t) = \bar{\xi}(t) \exp \left[ - \int \left[ i \frac{k}{\varepsilon} \frac{R_1 U_1^b + R_2 U_2^b}{R_1 + R_2} + \frac{1}{2} \frac{R_1 \nu_1 + R_2 \nu_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{\varepsilon}{k_1} + 2k^2 \right) \right] dt \right] \quad (21)$$

Nous insérons la nouvelle variable (21) dans l'équation (20), ensuite nous effectuons une analyse dimensionnelle en adimensionnant le temps par  $\frac{1}{\omega}$  et les coordonnées spatiales par  $h$ . L'oscillateur (20) s'écrit maintenant sous la forme suivante

$$\frac{d^2 \bar{\xi}(t)}{dt^2} + [\alpha_1 + \alpha_2 \cos^2(t) + \alpha_3 \sin^2(t) + \alpha_4 \sin(2t) + i\alpha_5 \cos(t) + i\alpha_6 \sin(t)] \bar{\xi}(t) = 0 \quad (22)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\varepsilon^2}{\sigma_2^2} \left( \frac{\nu R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \left( \frac{1}{2Da} + n^2 \right)^2 + \frac{(\rho - 1)}{(R_1 + R_2)} nGo + \frac{n^3}{We(R_1 + R_2)} \\ \alpha_2 &= A^2 \frac{n^2}{\varepsilon^2} \left[ \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1 \right) F_1^2 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 \right) F_2^2 + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} F_1 F_2 \right] \\ \alpha_3 &= A^2 \frac{n^2}{\varepsilon^2} \left[ \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1 \right) G_1^2 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 \right) G_2^2 + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} G_1 G_2 \right] \\ \alpha_4 &= A^2 \frac{n^2}{\varepsilon^2} \left[ \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1 \right) F_1 G_1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 \right) F_2 G_2 + \frac{R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)^2} (F_1 G_2 + F_2 G_1) \right] \\ \alpha_5 &= A \left[ \left( -\frac{2n}{\sigma_2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{\nu R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \right) \left( \frac{1}{2Da} + n^2 \right) + \frac{n\nu R_1}{Da\sigma_2(R_1 + R_2)} + \frac{2n^3}{\sigma_2} \frac{\nu R_1}{R_1 + R_2} \right) F_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{2n}{\sigma_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{\nu R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \right) \left( \frac{1}{2Da} + n^2 \right) + \frac{n}{Da\sigma_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{2n^3}{\sigma_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) F_2 \right] \\ \alpha_6 &= A \left[ \left( -\frac{2n}{\sigma_2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{\nu R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \right) \left( \frac{1}{2Da} + n^2 \right) + \frac{n\nu R_1}{Da\sigma_2(R_1 + R_2)} + \frac{2n^3}{\sigma_2} \frac{\nu R_1}{R_1 + R_2} \right) G_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{2n}{\sigma_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{\nu R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \right) \left( \frac{1}{2Da} + n^2 \right) + \frac{n}{Da\sigma_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{2n^3}{\sigma_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) G_2 \right] \end{aligned}$$

où  $We = \frac{\rho_2 h^3 \omega^2}{\gamma}$  est le nombre de weber,  $A = \frac{a}{h}$  est l'amplitude adimensionnelle des oscillations,  $n = kh$  est le nombre d'onde,  $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$  est le rapport des viscosités cinématiques et  $Go = \frac{g}{h\omega^2}$ .

### 3 Résultats et Discussion

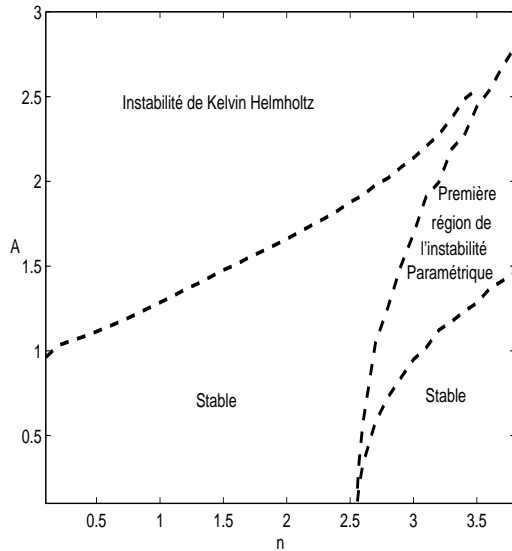


FIGURE 2 – Courbe de stabilité marginale pour  $\rho = 2$ ,  $We = 6.25$ ,  $Go = 0.16$ ,  $A_\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\sigma = 100$ ,  $H_1 = H_2 = 1$

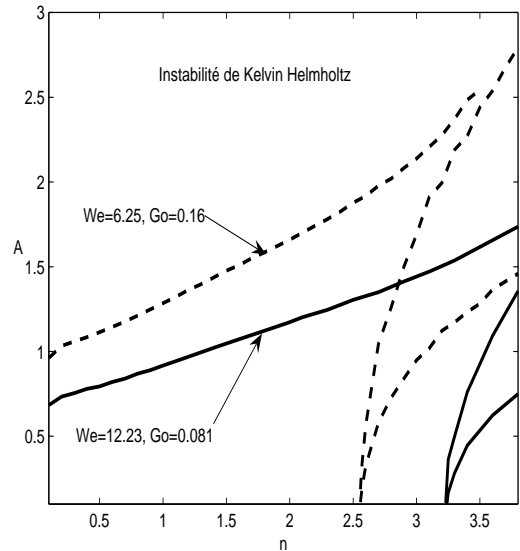


FIGURE 3 – Courbe de stabilité marginale pour  $\rho = 2$ ,  $A_\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $\sigma = 100$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $H_1 = H_2 = 1$

Nous nous intéressons aux courbes traduisant l'évolution de l'amplitude des oscillations,  $A$ , en fonction du nombre d'onde,  $n$ , en fixant le nombre de fréquence,  $\sigma_2$ , le contraste de viscosité,  $A_\mu$ , ainsi que les

autres paramètres physiques du problème.

Dans la Figure 2, nous illustrons les courbes de stabilité marginale pour  $\varepsilon = 0.5$  et  $Da = 0.25$ . Nous montrons que l'instabilité de l'interface est soit de type de Kelvin-Helmholtz soit de type paramétrique. La première région de cette figure correspond à une instabilité de type Kelvin-Helmholtz où le mode le plus dangereux correspond à une longueur d'onde infini et la deuxième région correspond à une résonance paramétrique due aux oscillations qui résulte de la variation de la vitesse en fonction du temps.

La Figure 3 illustre la variation de l'amplitude des vibrations,  $A$ , en fonction du nombre d'onde pour les différentes nombre de Weber,  $We$ , pour  $A_\mu = 0$ ,  $\sigma_2 = 100$ ,  $\varepsilon = 0.5$  et  $k_1 = 1$ . Dans ce cas, l'augmentation du nombre de Weber qui correspond à une augmentation de la fréquence des oscillations, d'une part, élargit la zone d'instabilité de Kelvin Helmholtz, d'autre part, favorise le déclenchement des instabilités paramétriques pour des nombres d'ondes plus grands. Sur cette figure on peut conclure que pour l'instabilité paramétrique, la fréquence a un effet stabilisant et pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, elle a un effet déstabilisant. Par exemple, pour l'instabilité de Kelvin Helmholtz le seuil  $A_o = 0.962$  pour  $We = 6.25$  et  $Go = 0.16$  et  $A_o = 0.684$  pour  $We = 12.23$  et  $Go = 0.081$ .

## 4 Conclusion

Nous avons considéré l'étude de stabilité linéaire de l'interface séparant deux couches fluides non miscibles de masses volumiques différentes saturant un milieu poreux soumis à oscillations horizontales. Le problème perturbé a été réduit à une équation de Mathieu régissant l'évolution de l'amplitude de l'interface. Par la suite nous avons déterminé les zones stables et instables en fonction des différents paramètres physiques du problème étudié.

## Références

- [1] P. G. Saffman and G. Taylor, 1958, The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid, *proc. R. Soc. Lond.* **245**, 312-319.
- [2] R. Raghven and S. S.Marseden, 1973, A Theoretical Study of the Instability in the Parallel Flow of Immiscible Liquids in a Porous Medium, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **26**, 205-216.
- [3] H. H. Bau, 1982, Kelvin-Helmholtz instability for parallel flow in porous media : A linear theory, *Phys. Fluids.* **25**, 1719-1722.
- [4] M. F. El-Sayed, 1998, Effect of normal electric fields on Kelvin-Helmholtz instability for porous media with Darcian and Forchheimer flows, *Physica A* **255**, 1-14.
- [5] A. Khan, S. S. Tak, P. Patni, 2010, Instability of superposed streaming fluids through a porous medium *Turkish J. Eng. Env. Sci.* **34**, 59-68.
- [6] Rishi Asthana, G.S. Agrawal, 2010, Viscous potential flow analysis of electrohydrodynamic Kelvin Helmholtz instability with heat and mass transfer, *International Journal of Engineering Science* **48**, 1925-1936.
- [7] M. H. Obied Allah, 2011, Viscous Potential Flow Analysis of Interfacial Stability With Mass Transfer Through Porous Media, *Appl. Math. Comput.* **217**, 7920-7931.
- [8] R. Asthana, M. K. Awasthi, G. S. Agrawal, 2011, Kelvin-Helmholtz Instability of two Viscous fluids, *Int. J. of Appl. Math. and Mech.* **8**, 1-13.
- [9] M. V. Khenner, D. V. Lyubimov, T. S. Belozeroval and B. Roux, 1999, Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system, *J.Fluid Mech.***18**, 1085-1101.
- [10] S. Majid Hassanizadeh, W. G. Gray, 1989, Boundary and Interface Conditions in Porous Media, *Water Resources Research.***25**, 1705-1715.